مبرهنة:
من أجل أي α فإن التطبيق الإسقاط P_α يكون مستمراً وهومومورفيزماً مفتوحاً من الزمرة الجداء الطبولوجية $G=\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ إلى الزمرة الطبولوجية G_α

$$P_\alpha : \prod G_\alpha \longrightarrow G_\alpha$$
$$x \longrightarrow P_\alpha(x) = x_\alpha$$

البرهان:
من أجل أي عنصرين $x, y \in G$ فإن
$$P_\alpha(xy) = x_\alpha y_\alpha = P_\alpha(x) P_\alpha(y)$$
أي أن P_α هومومورفيزم أما أنه غامر أي من أجل أي $x_\alpha \in G_\alpha$ فإنه يوجد

$x = (x_\beta)_{\beta\in A}$ و $x_\beta = e_\beta$ من أجل $\beta \neq \alpha$
ومن أجل $\beta = \alpha$ يكون $x_\beta = x_\alpha$ عندئذ يكون
$P_\alpha(x) = x_\alpha$ غامر
ومن المعروف أن تطبيق الإسقاط هو تطبيق مستمر ومفتوح

مبرهنة:
إذا كانت G_α $(\alpha \in A)$ زمرة طبولوجية متراصة من أجل أي α فإن $G = \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ تكون أيضاً زمرة طبولوجية متراصة

البرهان:
ينتج مباشرة من المبرهنة ما قبل الأخيرة (أخذ الجداء زمرة طبولوجية) ومن كون الجداء لمجموعات متراصة هي مجموعة متراصة

قوى زمرة في جداء زمرة
إذا كان من أجل أي α ($\alpha \in A$ مجموعة الأدلة) $G_\alpha = G$ فإن الجداء $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ يكتب بشكل مبسط G^A وواضح أن G^A هي مجموعة كل التطبيقات التي منطلقها A ومستقرها G، وإذا كانت G زمرة فإن G^A تكون زمرة أيضاً
الآن إذا كانت $A = G$ زمرة فإن G^G تكون أيضاً زمرة

ملاحظة:
أي زمرة جزئية يمكن أن تعتبر في G^G بمعنى آخر يوجد تطبيق واحد لواحد من G
في مجموعة جزئية من G^G (مبرهنة كايلي)

البرهان:
من أجل $a \in G$ ليكن ρ_a الانسحاب اليميني الداخلي من G في G أي أن
$\rho_a : x \to xa$ واضح أن $\rho_a \in G^G$ لنعرف التطبيق $\eta_\rho : G \to G^G$ (إ.ت)
$a \to \rho_a$

واضح أن η_ρ هو تطبيق واحد لواحد من G في G^G ، $\eta_\rho(G) \subseteq G^G$
بمعنى آخر يمكن أن نطابق بين G مع مجموعة كل الانسحابات اليمينية الداخلية
وبشكل مشابه يمكن أن نطابقها مجموعة كل الانسحابات اليسارية الداخلية

تعريف:
التطبيقين $\eta_\rho : a \to \rho_a$ ، $\eta_\lambda : a \to \lambda_a$ من G في G^G يسميان بالتمثيل النظامي
اليميني (أو اليساري) من G في G^G على الترتيب
في الحالة التي يكون فيها G زمرة تبديلية فإن $\lambda_a = \rho_a$ ومنه $\eta_\rho = \eta_\lambda$

مبرهنة: (تقبل بدون برهان)
إذا كانت A مجموعة متراصة في زمرة طبولوجية G فإن $\bar{A}$ تكون أيضاً متراصة

تعريف:
يسمى الفضاء الطبولوجي X فضاءً متراصاً محلياً إذا كانت كل نقطة x منه
تملك مجاورة متراصة

مبرهنة: من الطبولوجيا
إذا كان الفضاء الطبولوجي X متراصاً محلياً و T_2 فعندئذ بأنه من أجل أي نقطة
x منه وأي مجاورة U لها توجد مجاورة متراصة V للنقطة x بحيث يكون
$x \in V \subseteq U$:

مبرهنة :

إذا كانت G زمرة نصف طوبولوجية بحيث أن G فضاء هاوسدورف متراص محلياً عندئذٍ تكون G زمرة طوبولوجية

البرهان :

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن التطبيق $g_2 : G \to G$ حيث أن $g_2(x) = x^{-1}$ مستمر على G.

لتكن U مجاورة مفتوحة للعنصر الحيادي e، لنبرهن أولاً أنه توجد مجاورة متراصة C للعنصر e بحيث يكون $U \supseteq C^{-1}$

U مجاورة للعنصر e، و G متراصة محلياً و T_2 هاوسدورف ⇐ توجد مجاورة متراصة C للعنصر e بحيث يكون $C \subseteq U$ ولنفرض جدلاً أن $U \not\supseteq C^{-1}$ ولنفرض جدلاً أن $C^{-1} \not\subseteq U$ ⇐ $C^{-1} \cap (G-U) \neq \phi$ وبما أن C متراصة

⇐ C^{-1} متراصة وفي فضاء هاوسدورف فهي مغلقة و $(G-U)$ مغلقة أيضاً ومنه $C^{-1} \cap (G-U)$ مغلقة وبالتالي فإن الأسرة $\{C^{-1} \cap (G-U)\}$ (لعناصر C تتحرك على كل المجموعات المتراصة للعنصر e) تشكل أسرة من المجموعات المغلقة معناها أن يكون

$\cap (C^{-1} \cap (G-U)) = (\cap C^{-1}) \cap (G-U)$ ومنه $\cap C^{-1} \subseteq U$ لأن

$\cap C$ مجموعة متراصة وبالتالي يكون كما هو المطلوب

أو $\cap (C^{-1} \cap (G-U)) \neq \phi$ لكن $\cap C^{-1} = \{e\}$ (حيث C تتحرك على جميع الجوارات المتراصة للعنصر e)

$$\phi \neq \cap (C^{-1} \cap (G-U)) \subseteq \cap C^{-1} = \{e\} \Rightarrow \{e\} = C^{-1} \cap (G-U)$$

معناه $e \in G-U$ وهذا تناقض لأن $e \in U$ إذن يوجد جوار متراص C للعنصر e بحيث يكون $U \supseteq C^{-1}$

لتكن W مجاورة للعنصر x^{-1} ⇐ Wx مجاورة للعنصر الحيادي e ⇐ (حسب ما سبق) توجد مجاورة متراصة للعنصر e بحيث يكون $Wx \supseteq C^{-1}$ ⇐ $W \supseteq C^{-1}x^{-1}$

⇐ $W \supseteq (xC)^{-1}$ هذا يعني أن g مستمر في النقطة x وبما أن x اختيارية فهو مستمر على G وبالتالي فإن G تكون زمرة طوبولوجية